

PRE-BOARD EXAMINATION 2018 -19**MATHEMATICS****CODE:2001- AG-TS-3-OT****CLASS XII**

Time : 3 Hours

Maximum Marks : 100

सामान्य निर्देश :

1. सभी प्रश्न अनिवार्य हैं।
2. इस प्रश्न पत्र में 29 प्रश्न हैं, जो 4 खण्डों में अ, ब, स व द हैं। खण्ड – अ में 4 प्रश्न हैं और प्रत्येक प्रश्न 1 अंक का है। खण्ड – ब में 8 प्रश्न हैं और प्रत्येक प्रश्न 2 अंको के हैं। खण्ड – स में 11 प्रश्न हैं और प्रत्येक प्रश्न 4 अंको का है। खण्ड – द में 6 प्रश्न हैं और प्रत्येक प्रश्न 6 अंको का है।
3. इसमें कोई भी सर्वोपरि विकल्प नहीं है, लेकिन आंतरिक विकल्प 3 प्रश्न 4 अंको में और 3 प्रश्न 6 अंको में दिए गए हैं। आप दिए गए विकल्पों में से एक विकल्प का चयन करें।
4. कैलकुलेटर का प्रयोग वर्जित है।
5. कृपया जाँच कर लें कि इस प्रश्न-पत्र में मुद्रित पृष्ठ 6 हैं।
6. प्रश्न-पत्र में दाहिने हाथ की ओर दिए गए कोड नम्बर को छात्र उत्तर-पुस्तिका के मुख- पृष्ठ पर लिखें।

General Instructions :-

- (i) All Question are compulsory :
- (ii) This question paper contains 29 questions.
- (iii) Question 1-4 in Section A are very sort-answer type question carrying 1 mark each.
- (iv) Question 5-12 in Section B are sort-answer type question carrying 2 mark each.
- (v) Question 13-23 in Section C are long-answer-I type question carrying 4 mark each.
- (vi) Question 24-29 in Section D are long-answer-II type question carrying 6 mark each
- (vii) There is no overall choice. However, internal choice has been provided in 3 question of four marks and 3 questions of six marks each. You have to attempt only one lf the alternatives in all such questions.
- (viii) Use of calculator is not permitted.
- (ix) Please check that this question paper contains 6 printed pages.
- (x) Code number given on the right hand side of the question paper should be written on the title page of the answer-book by the candidate.

खण्ड – अ

SECTION – A

प्रश्न संख्या 1 से 4 तक प्रत्येक प्रश्न 1 अंक का है।

Question numbers 1 to 4 carry 1 mark each.

1. निम्न आव्यूह समीकरण में प्रारम्भिक संक्रिया $R_2 \rightarrow R_2 + R_1$ का प्रयोग करने के पश्चात प्राप्त समीकरण लिखिए:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -3 \\ 9 & -4 \end{pmatrix}$$

In the following matrix equation use elementary operation $R_2 \rightarrow R_2 + R_1$ and write the equation thus

obtained. $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -3 \\ 9 & -4 \end{pmatrix}$

OR अथवा

यदि A एक ऐसा वर्ग आव्यूह है कि $A^2 = I$ है, तो $(A - I)^3 + (A + I)^3 - 7A$ का सरतलतम मान ज्ञात कीजिए।

If A is a square matrix such that $A^2 = I$, then find the simplified value of $(A - I)^3 + (A + I)^3 - 7A$.

2. यदि $(\vec{a} \times \vec{b})^2 + (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = 225$ तथा $|\vec{a}| = 5$ है तो $|\vec{b}|$ का मान लिखिए।

If $(\vec{a} \times \vec{b})^2 + (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = 225$ and $|\vec{a}| = 5$, then write the value of $|\vec{b}|$.

3. Let set $A = \{3, 5, 6\}$ and set $B = \{1, 4\}$. A relation R from set A to set B is defined as $R = \{(a, b) \in A \times B : a - b \text{ is an even number}\}$. List the elements of relation R.

यदि समुच्चय $A = \{3, 5, 6\}$ और समुच्चय $B = \{1, 4\}$ में संबंध R इस प्रकार परिभाषित है कि समुच्चय $R = \{(a, b) \in A \times B : a - b \text{ एक समसंख्या है}\}$, तो सम्बन्ध R के सभी अवयव ज्ञात कीजिए।

4. If $\vec{a} = i + j + k$, $\vec{b} = 4i - 2j + 3k$ and $\vec{c} = i - 2j + k$, find a vector of magnitude 6 units which is parallel to the vector $2\vec{a} - \vec{b} + 3\vec{c}$.

यदि $\vec{a} = i + j + k$, $\vec{b} = 4i - 2j + 3k$ तथा $\vec{c} = i - 2j + k$, है, तो सदिश $2\vec{a} - \vec{b} + 3\vec{c}$ से समांतर 6 इकाई परिमाण का एक सदिश ज्ञात कीजिए।

खण्ड – ब

SECTION – B

प्रश्न संख्या 5 से 12 तक प्रत्येक प्रश्न 2 अंको का है।

Question numbers 5 to 12 carry 2 marks each.

5. सिद्ध कीजिए : $\tan\left[\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{a}{b}\right] + \tan\left[\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{a}{b}\right] = \frac{2b}{a}$

Prove that : $\tan\left[\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{a}{b}\right] + \tan\left[\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{a}{b}\right] = \frac{2b}{a}$.

OR

x के लिये हल कीजिए : $\tan^{-1}\left(\frac{x-5}{x-6}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{x+5}{x+6}\right) = \frac{\pi}{4}$.

Solve the following for x: $\tan^{-1}\left(\frac{x-5}{x-6}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{x+5}{x+6}\right) = \frac{\pi}{4}$.

6. सिद्ध कीजिए कि यदि E तथा F स्वतंत्र घटनाएँ हैं तो घटनाएँ E तथा \bar{F} भी स्वतंत्र घटनाएँ हैं।

Prove that if E and F are independent events, then the events E and \bar{F} are also independent.

7. अवकल समीकरण $\sqrt{1+x^2+y^2+x^2y^2} + xy \frac{dy}{dx} = 0$ का हल ज्ञात कीजिए,

Solve the following differential equation: $\sqrt{1+x^2+y^2+x^2y^2} + xy \frac{dy}{dx} = 0$

OR अथवा

Form the differential equation of the family of circle in the second quadrant and touching the coordinate axes.

द्वितीय चतुर्थांश में ऐसे वृत्तों के कुल का अवकल समीकरण ज्ञात कीजिए जो निर्देशांक अक्षों को स्पर्श करते हैं।

8. यदि $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ a & a^2 & 1 \\ a^2 & 1 & a \end{vmatrix} = -4$ है तो सारणिकों के गुणधर्मों के प्रयोग से $\begin{vmatrix} a^3 - 1 & 0 & a - a^4 \\ 0 & a - a^4 & a^3 - 1 \\ a - a^4 & a^3 - 1 & 0 \end{vmatrix}$ का मान ज्ञात

कीजिए

If $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ a & a^2 & 1 \\ a^2 & 1 & a \end{vmatrix} = -4$, then using properties of determinants, find the value of

$$\begin{vmatrix} a^3 - 1 & 0 & a - a^4 \\ 0 & a - a^4 & a^3 - 1 \\ a - a^4 & a^3 - 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

9. मान ज्ञात कीजिए: Evaluate $\int_{-1}^1 x|x| dx$.

10. दर्शाइए कि फलन $f(x) = x^3 - 3x^2 + 6x - 100$, R पर वर्धमान है।

Show that the function $f(x) = x^3 - 3x^2 + 6x - 100$ is increasing on \mathbb{R} .

OR अथवा

For what values of x is the rate of increase of $x^3 - 5x^2 + 5x + 8$ is twice the rate of increase of x ?

11. $t = \frac{2\pi}{3}$ पर $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए जब $x=10 (t-\sin t)$ तथा $y=12 (1-\cos t)$ है।

Find $\frac{dy}{dx}$ at $t = \frac{2\pi}{3}$ when $x=10 (t-\sin t)$ and $y=12 (1-\cos t)$.

12. यदि $\vec{p} = a\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$, $\vec{b} = 1$, $\vec{q} = \hat{i} + b\hat{j} + \hat{k}$ तथा $\vec{r} = \hat{i} + \hat{j} + c\hat{k}$ सहतलीय है, तो सिद्ध कीजिए $\frac{1}{1-a} + \frac{1}{1-b} + \frac{1}{1-c} = 1$ ।

If the vectors $\vec{p} = a\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$, $\vec{q} = \hat{i} + b\hat{j} + \hat{k}$ and $\vec{r} = \hat{i} + \hat{j} + c\hat{k}$ are coplanar, then for $a, b, c \neq 1$ show that

$$\frac{1}{1-a} + \frac{1}{1-b} + \frac{1}{1-c} = 1$$

खण्ड – स

SECTION – C

प्रश्न संख्या 13 से 23 तक प्रत्येक प्रश्न 4 अंकों का है।

Question numbers 13 to 23 carry 4 marks each.

13. Evaluate : मान ज्ञात कीजिए : $\int \frac{x^3 + x}{x^4 - 9} dx$.

14. मान ज्ञात कीजिए : $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{x + \frac{\pi}{4}}{2 - \cos 2x} dx$

Evaluate : $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{x + \frac{\pi}{4}}{2 - \cos 2x} dx$

OR अथवा

मान ज्ञात कीजिए : Evaluate : $\int_0^{\pi/2} \sin 2x \tan^{-1}(\sin x) dx$.

15. अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} + y \tan x = 3x^2 + x^3 \tan x$, $x \neq \frac{\pi}{2}$ का विषिष्ट हल ज्ञात कीजिए, दिया गया है जब $x = \frac{\pi}{3}$ है तो $y = 0$ है।

Find the particular solution of the differential equation $\frac{dy}{dx} + y \tan x = 3x^2 + x^3 \tan x, x \neq \frac{\pi}{2}$, given that $y = 0$ when $x = \frac{\pi}{3}$.

OR

अवकल समीकरण $(x dy - y dx) y \cdot \sin\left(\frac{y}{x}\right) = (y dx + x dy) x \cos\frac{y}{x}$, का विषिष्ट हल ज्ञात कीजिए, दिया गया है जब $x = 3$ है तो $y = \pi$ है।

Find the particular solution of the differential equation

$$(x dy - y dx) y \cdot \sin\left(\frac{y}{x}\right) = (y dx + x dy) x \cos\frac{y}{x}, \text{ given that } y = \pi \text{ when } x = 3.$$

16. यदि $y = \log\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2$ है, तो दर्शाइए कि $x(x+1)^2 y_2 + (x+1)^2 y_1 = 2$.

If $y = \log\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2$, then shown that $x(x+1)^2 y_2 + (x+1)^2 y_1 = 2$.

OR अथवा

यदि $y = (\sec^{-1} x)^2$ है, तो दर्शाइए कि $x^2(x^2-1)\frac{d^2y}{dx^2} + (2x^3-x)\frac{dy}{dx} = 2$

If $y = (\sec^{-1} x)^2$, then shown that $x^2(x^2-1)\frac{d^2y}{dx^2} + (2x^3-x)\frac{dy}{dx} = 2$

17. Show that the equation of normal at any point t on the curve $x = 3 \cos t - \cos^3 t$ and $y = 3 \sin t - \sin^3 t$ is $4(y \cos^3 t - x \sin^3 t) = 3 \sin 4t$.

दर्शाइए कि वक्र $x = 3 \cos t - \cos^3 t$ तथा $y = 3 \sin t - \sin^3 t$ के किसी बिंदु t पर अभिलंब का समीकरण $4(y \cos^3 t - x \sin^3 t) = 3 \sin 4t$ है।

OR अथवा

Determine the intervals in which the function $f(x) = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 21$ is strictly increasing or strictly decreasing.

अंतराल ज्ञात कीजिए जहाँ पर फलन $f(x) = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 21$ निरंतर वर्धमान अथवा निरंतर ह्रासमान है।

18. a & b का वह मान ज्ञात कीजिए, जिसके लिए फलन $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{if } x \leq 2 \\ ax + b & \text{if } x > 2 \end{cases}$ अवकलनीय है।

If the following function is differentiable at $x=2$, then find the values of a and b. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{if } x \leq 2 \\ ax+b & \text{if } x > 2 \end{cases}$

19. एक दुकान X में, 30 टिन असली घी के तथा 40 टिन मिलावटी घी के, जो एक जैसे लगते हैं, बिक्री के लिए रखे हैं जबकि दुकान Y में, उसी प्रकार के 50 टिन असली घी के तथा 60 टिन मिलावटी घी के रखे हैं। दोनों में यादृच्छया चुनी गई एक दुकान से एक टिन घी खरीदा गया तथा मिलावट वाला पाया गया। प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि वह दुकान Y से खरीदा गया।

In a shop X, 30 tins of pure ghee and 40 tins of adulterated ghee which look alike, are kept for sale while in shop Y, similar 50 tins of pure ghee and 60 tins of adulterated ghee are there. One tin of ghee is purchased from one of the randomly selected shops and is found to be adulterated. Find the probability that it is purchased from shop Y.

20. Given that vectors $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ from a triangle such that $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$. Find p, q, r, s such that area of triangle is $5\sqrt{6}$ where $\vec{a} = pi + qj + rk$ $\vec{b} = si + 3j + 4k$ & $\vec{c} = 3i + j - 2k$.

दिया है कि तीन सदिश $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ इस प्रकार एक त्रिभुज बनाते हैं कि $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$ । ऐसे p, q, r, s ज्ञात कीजिए कि

त्रिभुज का क्षेत्रफल $5\sqrt{6}$ है जहाँ $\vec{a} = pi + qj + rk$ $\vec{b} = si + 3j + 4k$ तथा $\vec{c} = 3i + j - 2k$ हैं

21. Using properties of determinates, show that ΔABC is isosceles if:

सारणिकों के गुणधर्मों का प्रयोग कर सिद्ध कीजिए कि ΔABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है यदि

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 + \cos A & 1 + \cos B & 1 + \cos C \\ \cos^2 A + \cos A & \cos^2 B + \cos B & \cos^2 C + \cos C \end{vmatrix} = 0$$

22. Find the coordinates of the point where the line through the points A(3,4,1) and B(5,1,6) crosses the XZ plane. Also find the angle which this line makes with the XZ plane.

उस बिंदु के निर्देशांक कीजिए जहाँ पर बिंदुओं A(3,4,1) और B(5,1,6) से होकर जाने वाली रेखा XZ समतल को प्रतिच्छेद करती है। वह कोण भी ज्ञात कीजिए जो यह रेखा XZ समतल के साथ बनाती है।

23. A bag contains 4 balls. Two balls are drawn at random (without replacement) and are found to be white. What is the probability that all balls in the bag are white?

एक थैले में 4 गेंदे हैं। यादृच्छया दो गेंदे बिना प्रतिस्थापना के निकाली गईं और दोनों सफेद पाई गईं। इसकी क्या प्रायिकता है थैले में सभी गेंदे सफेद हैं ?

खण्ड – द

SECTION – D

प्रश्न संख्या 24 से 29 तक प्रत्येक प्रश्न 6 अंकों का है।

Question numbers 24 to 29 carry 64 marks each.

24. $f: \mathbb{R} - \left\{-\frac{4}{3}\right\} \rightarrow \mathbb{R} - \left\{\frac{4}{3}\right\}$, जो $f(x) = \frac{4x+3}{3x+4}$ द्वारा प्रदत्त है, पर विचार कीजिए। दर्शाइए कि f एकैकी तथा आच्छादक है। f का प्रतिलोम फलन ज्ञात कीजिए। अतः $f^{-1}(0)$ ज्ञात कीजिए तथा x ज्ञात कीजिए ताकि $f^{-1}(x) = 2$.

Consider $f: \mathbb{R} - \left\{-\frac{4}{3}\right\} \rightarrow \mathbb{R} - \left\{\frac{4}{3}\right\}$, given by $f(x) = \frac{4x+3}{3x+4}$. Show that f is bijective. Find the inverse of f and hence find $f^{-1}(0)$ and x such that $f^{-1}(x) = 2$.

OR

किसी प्रदत्त अरिक्त समुच्चय X के लिए एक द्विआधारी संक्रिया $*$: $P(X) \times P(X) \rightarrow P(X)$ पर विचार कीजिए, जो $A * B = A \cap B, \forall A, B \in P(X)$ द्वारा परिभाषित है, जहाँ $P(X)$, समुच्चय X का घात समुच्चय (Power set) है। दर्शाइए कि $*$ कमविनिमेय तथा साहचर्य है और इस संक्रिया का तत्समक अवयव X है तथा संक्रिया $*$ के लिए $P(X)$ में केवल X व्युत्क्रमणीय अवयव है।

Let X be a non – empty set. $P(x)$ be its power set. Let $*$ be an operation defined on element of $P(x)$ by $A*B = A \cap B \forall A, B \in P(X)$ Then,

(i) Prove that $*$ is a binary operation in $P(X)$.

(ii) Is $*$ commutative ?

(iii) Is $*$ associative?

(iv) find the identity element in $P(X)$ w.r.t $*$.

(v) find the all the invertible element of $P(X)$

(vi) if O is another binary operation defined on $P(X)$ as $A O B = A \cup B$ then verify that O distribution itself over $*$.

25. Find the vector equation of the plane through the line of intersection of the planes $x + y + z = 1$ and $2x + 3y + 4z = 5$ which is perpendicular to the plane $x - y + z = 0$. Hence find whether the plane thus obtained contains the line $\frac{x+2}{5} = \frac{y-3}{4} = \frac{z}{5}$.

OR

Find the co-ordinates of the point where the line $\vec{r} = (-\hat{i} - 2\hat{j} - 3\hat{k}) + \lambda(3\hat{i} + 4\hat{j} + 3\hat{k})$ meets the plane which is perpendicular to the vector $\vec{n} = \hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}$ and at a distance of $\frac{4}{\sqrt{11}}$ from origin.

उस बिंदु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए जहाँ रेखा $\vec{r} = (-\hat{i} - 2\hat{j} - 3\hat{k}) + \lambda(3\hat{i} + 4\hat{j} + 3\hat{k})$ उस समतल को मिलती है जो सदिश $\vec{n} = \hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}$ पर लंबवत है तथा मूल बिंदु से $\frac{4}{\sqrt{11}}$ की दूरी पर है।

26. समाकलनों के प्रयोग से वक्र $y = x|x|$ तथा $x^2 + y^2 = 2$ में तथा y - अक्ष से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

Using integration, find the area in the first quadrant bounded by the curves $y = x|x|$ & circle $x^2 + y^2 = 2$ and y - axis .

27. प्रारम्भिक संक्रियाओं के प्रयोग द्वारा आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ का व्युत्क्रम ज्ञात कीजिए तथा A^{-1} के प्रयोग से

समीकरण निकाय $XA = [1 \ 0 \ 1]$ को हल कीजिए।

Let $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$, find the inverse of A using elementary row transformations and

$$XA = [1 \ 0 \ 1]$$

hence solve the following matrix equation

28. एक आहार-विज्ञानी दो भोज्यों X तथा Y का उपयोग करते हुए विशेष आहार तैयार करना चाहता है। भोज्य X का प्रत्येक पैकेट (जिसमें 30 ग्राम अन्तर्विष्ट है) में कैल्शियम के 12 मात्रक, लोह तत्व के 4 मात्रक, कोलेस्टेरॉल के 6 मात्रक तथा विटामिन A के 6 मात्रक अन्तर्विष्ट है। उसी मात्रा के भोज्य Y के प्रत्येक पैकेट में कैल्शियम के 3 मात्रक, लोह तत्व के 20 मात्रक, कोलेस्टेरॉल के 4 मात्रक तथा विटामिन A के 3 मात्रक अन्तर्विष्ट है। आहार में कैल्शियम के कम से कम 240 मात्रक, लोह तत्व के कम से कम 460 मात्रक तथा कोलेस्टेरॉल के अधिक से अधिक 300 मात्रक अपेक्षित है। प्रत्येक भोज्य के कितने-कितने पैकेटों का उपयोग किया जाए ताकि आहार में विटामिन A की मात्रा को न्यूनतम किया जा सके? उपर्युक्त को एक रैखिक प्रोग्रामन समस्या बनाकर ग्राफ द्वारा हल कीजिए।

A dietician wants to develop a special diet using two foods X and Y. Each packet (contains 30g) of food X contains 12 units of calcium, 4 units of iron, 6 units of cholesterol and 6 units of vitamin A. Each packet of the same quantity of food Y contains 3 units of calcium, 20 units of iron, 4 units of cholesterol and 3 units of vitamin A. the diet requires at least 240 units of calcium, at least 460 units of iron and at most 300 units of cholesterol. Make an LPP to find how many packets of each food should be used to minimize the amount vitamin A in the diet, and solve it graphically.

29. Prove that the least perimeter of an isosceles triangle in which a circle of radius r can be inscribed is $6\sqrt{3}r$.

सिद्ध कीजिए कि समद्विबाहु त्रिभुज, जिसमें r त्रिज्या का एक अंतवृत्त खींचा गया है, का न्यूनतम परिमाप $6\sqrt{3}r$ है।

असफलता और सफलता दोनों ही अवस्थाओं में लोग तुम्हारी बातें करेंगे, सफल होने पर प्रेरणा के रूप में और असफल होने पर सीख के रूप में